ТЕОРИЈА БРОЈЕВА И ПОЛИНОМА

Задаци за домаћи (I део) - 2016/2017 година

1. Доказати да за сваки природан број n важи:
   (а) $27 \mid 10^n + 18n - 1$
   (б) $9 \mid 4^n + 15n - 1$

2. Доказати да $900 \mid 6 \cdot 16^{n+1} + 4^{2n+1} - 3 \cdot 4^{n+3} - 2 \cdot 4^{n+1} + 100$ важи за сваки природан број n.

3. Нека су x и y цели бројеви такви да је $29x + 18y$ дељив са 17. Доказати да је број $23x + 9y$ дељив са 17. Да ли број $11x + 8y$ мора бити дељив са 17?

4. Одредити све природне бројеве n за које је разломак $\dfrac{27n+17}{9n+2}$ цео број.

5. Доказати да за природне бројеве a, b и c важи $[a,b,c](a,b)(b,c)(c,a) = abc(a,b,c)$.

6. Доказати да за природне бројеве m и n важи $\varphi(mn)\varphi((m,n)) = (m,n)\varphi(m)\varphi(n)$.

7. Одредити све природне бројеве такве да је $3\tau(n) = n$.

8. Нека су a и b узајамно прости природни бројеви. Доказати да је највећи заједнички делилац за бројеве $a - b$ и $a^2 + ab + b^2$ или 1 или 3.

9. Доказати да се разломак $\dfrac{a+b}{c+d}$ не може скратити ако је $ad - bc = 1$ или $ad - bc = -1$.

10. Наћи све просте бројеве p за које су бројеви $p^2 + 4$ и $p^2 + 6$ прости.

11. Ако су p и $2p^2 + 1$ прости, доказати да је и $3p^2 + 2$ такође прост.

12. Ако је 11...1 прост, тада је и број цифара тог броја прост.

13. Одредити цифре a и b тако да је број $\overline{1a7b11a77b}$ дељив са 77. Наћи сва решења.

14. Одредити последње две цифре броја:
   (а) 7^{2015} (б) 7^{777} (в) $7^{7^{7^7}}$ (г) $((7^7)^7)^7$.

15. Одредити остатак при дељењу броја $1111^{22} + 2222^{33} + 3333^{44} + 4444^{55} + 5555^{66}$ са 13.

16. Нека су a, b и c природни бројеви већи од 1, такви да је $(a,b) = (b,c) = (c,a) = 1$ и $\{x_1, x_2, \dots x_a\}$, $\{y_1, y_2, \dots y_b\}$ и $\{z_1, z_2, \dots z_c\}$, редом, потпуни систем остатака по модулу a, b и c. Доказати да скуп
$$\{x_i bc + y_j ca + z_k ab \mid 1 \le i \le a, \quad 1 \le j \le b, \quad 1 \le k \le c\}$$
чини потпуни систем остатака по модулу abc.

17. Доказати да $3^{n+1} \mid 13^{3^n} - 1$ важи за сваки природан број n.

18. Одредити остатак при дељењу броја $518^{27^{2017}}$ са 15.

19. Доказати да $6^{n+1} \mid 7^{6^n} - 1$ за сваки природан број n.

20. Доказати да су за произвољан природан број k последњих $2k$ цифара броја $5^{2^{2k+1}+2k} - 25^k$ нуле.

21. Нека је p непаран прост број који не дели број a. Доказати да је тачно један од бројева $A = a^{1+2+\cdots+(p-1)} - 1$ и $B = a^{1+2+\cdots+(p-1)} + 1$ дељив са p.

22. Низ природних бројева $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан је са $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = 3^{a_n}, n \ge 1$. Одредити последње две цифре бројева a_{2015} и a_{2016}.

23. Нека је p непаран прост број и k цео број такав да је $0 < k < p$. Доказати да је $(k-1)!(p-k)! \equiv_p (-1)^k$.

24. Нека су p и $p + 6$ прости бројеви. Доказати да важи $80 \cdot 3^{p+5} + 3^4 \cdot 6! \cdot (p-1)! + (p+4)! \equiv_{p(p+6)} 0$.

25. Доказати да је за сваки непаран прост број p бројилац m разломка
$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$
дељив са p.